

Algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada

Algunas integrais indefinidas que contêm a função hipergeométrica generalizada

Some undefined integrals containing to the generalized hypergeometric function

Jaime Castillo–Pérez¹ y Leda Galué²

*Recepción: 12-nov-2008/Modificación: 14-may-2009/Aceptación: 14-may-2009
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

Resumen

En 1999 Nina Virchenko consideró la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ con un conjunto de fórmulas de recurrencia y de diferenciación. En este trabajo se evalúan algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada y algunos casos particulares.

Palabras claves: función hipergeométrica generalizada, relaciones de recurrencia, integrales indefinidas.

Resumo

Em 1999, Nina Virchenko considerado um generalização da função hipergeométrica Gauss ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ com um conjunto de fórmulas recorrência e

¹ MSc en Matemática aplicada, jacas68@yahoo.es, profesor, GIMA, Universidad de la Guajira, Riohacha–Colombia.

² PhD, ledagalue@hotmail.com, profesor jubilado, CIMA, Universidad del Zulia, Maracaibo–Venezuela.

diferenciação. Este trabalho avalia algumas integrais indefinidas que contém a função hipergeométrica generalizada e alguns casos especiais.

Palavras chaves: função hipergeométrica generalizada, relações de recorrência, integrais indefinidas.

Abstract

In 1999 Nina Virchenko have considered the τ -generalization of Gauss hypergeometric function ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$ with a set of recurrence relations and differentiation formulas. In this paper is obtained some undefined integrals associated with the generalized hypergeometric function and some particular cases.

Key words: generalized hypergeometric function, recurrence relations, undefined integrals.

1 Introducción

Un gran número de funciones especiales pueden ser representadas en términos de series hipergeométricas y series hipergeométricas confluentes. Las series hipergeométricas en una y varias variables, aparecen naturalmente en una variedad de problemas en matemática aplicada, estadística, investigación de operaciones, física teórica y ciencias de la ingeniería [1, 2, 3]. Mathai y Saxena [3, 4] presentaron varias aplicaciones de las series hipergeométricas en una y varias variables en la solución de problemas de estadística y ciencias físicas. Kalla y colaboradores [5] usan funciones hipergeométricas para estudiar nuevas funciones de probabilidad que generalizan las existentes.

En 1999 N. Virchenko [6] consideró una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss de la forma

$${}_2R_1^\tau(z) = {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!}, \quad (1)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$; $|z| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (1),

$${}_2R_1(a, b; c; 1; z) = {}_2F_1(a, b; c; z), \quad c \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

Esta función tiene la representación integral

$${}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt^\tau)^{-a} dt,$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

Posteriormente, en el 2008, J. Castillo [7, 8] presentó la representación para la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$

$$\begin{aligned} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ &{}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau > 0, \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0.$$

En este trabajo se evalúan algunas integrales indefinidas que contienen a la función hipergeométrica generalizada, las cuales generalizan a las existentes.

2 Algunas integrales indefinidas que contienen a la función ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$

En la actualidad se tienen muchos resultados que involucran a la función hipergeométrica de Gauss, entre los cuales están las integrales indefinidas asociadas a dicha función, éstas han sido calculadas por diversos investigadores, por ejemplo [9, págs. 44–45]:

$$\begin{aligned} &\int x^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ c; & x \end{matrix}\right) dx = \\ &n! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} (c-k)_k x^{n-k+1}}{(n-k+1)! (a-k)_k (b-k)_k} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a-k, & b-k \\ c-k; & x \end{matrix}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int x^{a-n-2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ c; & x \end{matrix}\right) dx =$$

$$n!x^{a-n-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n-k+1)!(a-k)_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a-k, & b \\ & c; & x \end{matrix} \right). \quad (4)$$

$$\int (1-x)^n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, & b \\ & c; & x \end{matrix} \right) dx =$$

$$n! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(c-k)_k (1-x)^{n-k+1}}{(n-k+1)!(a-k)_k (b-k)_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a-k, & b-k \\ c-k; & x \end{matrix} \right). \quad (5)$$

$$\int x^{a-n-2} (1-x)^n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, & b \\ & c; & x \end{matrix} \right) dx =$$

$$n!x^{a-n-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-x)^{n-k+1}}{(n-k+1)!(a-k)_k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a-k, & b \\ & c; & x \end{matrix} \right). \quad (6)$$

3 Algunas integrales indefinidas que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss

En esta sección se presentan tres casos diferentes de integrales indefinidas que involucran a la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z)$, también se presentan los casos particulares asociados a los mismos. Además, se usa con frecuencia (2), lo que facilita obtener las condiciones de validez de cada integral.

3.1 Integrales de la forma $\int z^\alpha {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz$

3.1.1 Calcular la integral $I = \int z^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz$. De acuerdo con (2)

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) dz,$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0.$$

Teniendo en cuenta la convergencia absoluta de la serie, se intercambia la suma con la integral y se obtiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \int z^n {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right) dz.$$

Usando (3) para evaluar la integral,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \\ &\quad n! \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j+1} \left(\frac{k+b}{\tau}+1-j\right)_j}{(n-j+1)!(a-j)_j \left(\frac{k+b}{\tau}-j\right)_j} \times \\ &\quad {}_2F_1\left(a-j, \frac{k+b}{\tau}-j; \frac{k+b}{\tau}+1-j; z\right). \end{aligned}$$

Este resultado aplicando nuevamente (2) equivale a

$$\begin{aligned} \int z^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz &= n! \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j+1} \Gamma(b-\tau j) z^{n-j+1}}{(n-j+1)!(a-j)_j \Gamma(c-\tau j)} \times \\ &\quad {}_2R_1(a-j, b-\tau j; c-\tau j; \tau; z), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad c - \tau j \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

Si $\tau = 1$ y $n = 0$ en (7), se obtienen respectivamente (3) y

$$\int {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-\tau)}{(a-1) \Gamma(b) \Gamma(c-\tau)} {}_2R_1(a-1, b-\tau; c-\tau; \tau; z), \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad c - \tau \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

Si $\tau = 1$ en (8), se obtiene el resultado conocido [9, pág. 44, No. (1.15.1.5)].

3.1.2 Calcular la integral $I = \int z^{a-n-2} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz$. De (2) se tiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times$$

$$\int z^{a-n-2} {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) dz,$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0,$$

donde se ha intercambiado el orden de la integral y la sumatoria.

Usando (4) para evaluar la integral, y aplicando (2)

$$\int z^{a-n-2} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz = n! z^{a-n-1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n-j+1)! (a-j)_j} {}_2R_1(a-j, b; c; \tau; z), \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

Si $\tau = 1$ y $n = 0$ en (9), se obtienen respectivamente (4) y

$$\int z^{a-2} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz = \frac{z^{a-1}}{(a-1)} {}_2R_1(a-1, b; c; \tau; z). \quad (10)$$

Si $\tau = 1$ en (10), se tiene un resultado conocido [9, pág. 44, No. (1.15.1.6)].

3.1.3 Calcular $I = \int z^{c-1} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau) dz$. Usando la expansión en serie de la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau)$ se tiene

$$I = \int \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \Gamma(b+k\tau)}{\Gamma(c+k\tau)} \frac{z^{\tau k+c-1}}{k!} dz.$$

Teniendo en cuenta la convergencia absoluta de la serie, se intercambia la suma con la integral, y desarrollando se obtiene

$$I = z^c \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \Gamma(b+k\tau)}{\Gamma(c+1+k\tau)} \frac{z^{\tau k}}{k!},$$

de donde

$$\int z^{c-1} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau) dz = \frac{z^c}{c} {}_2R_1(a, b; c+1; \tau; z^\tau), \quad (11)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq -1, -2, \dots$, $|z^\tau| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (11), se obtiene el resultado conocido [9, pág. 44, No. (1.15.1.7)].

3.1.4 Calcular $I = \int z^{c+n-1} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau) dz$ Usando la fórmula generalizada de integración por partes

$$\int f^{(n)}(x) g(x) dx = f^{(n-1)}(x) g(x) - f^{(n-2)}(x) g'(x) + f^{(n-3)}(x) g''(x) - \dots + (-1)^n \int f(x) g^{(n)}(x) dx$$

y el resultado (11) se obtiene

$$I = \frac{z^{n+c}}{c} {}_2R_1(a, b; c+1; \tau; z^\tau) - \frac{nz^{n+c}}{c(c+1)} {}_2R_1(a, b; c+2; \tau; z^\tau) + \dots + \frac{(-1)^n n(n-1)\dots 2,1}{c(c+1)\dots(c+n-1)(c+n)} z^{n+c} {}_2R_1(a, b; c+n+1; \tau; z^\tau),$$

esto es,

$$\int z^{c+n-1} {}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau) dz = n! z^{n+c} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j+1}}{(n-j+1)!(c)_j} {}_2R_1(a, b; c+j; \tau; z^\tau), \quad (12)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq -1, -2, \dots; |z^\tau| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (12), se obtiene [9, pág 44, No. (1.15.1.4)].

3.2 Integrales de la forma $\int (1-z)^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz$

Por analogía con el cálculo de 3.1.1

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} \times \int (1-z)^n {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau}+1; z\right) dz, \\ \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0,$$

y en virtud de (5),

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}+1\right)} n! \times$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\left(\frac{k+b}{\tau} + 1 - j\right)_j (1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)! (a-j)_j \left(\frac{k+b}{\tau} - j\right)_j} \times {}_2F_1\left(a-j, \frac{k+b}{\tau} - j; \frac{k+b}{\tau} + 1 - j; z\right).$$

En virtud de (2) se obtiene

$$\int (1-z)^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz = n! \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\Gamma(b-j\tau) (1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)! (a-j)_j \Gamma(c-j\tau)} \times {}_2R_1(a-j, b-j\tau; c-j\tau; \tau; z), \quad (13)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad c - \tau j \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

Si $\tau = 1$ en (13), se tiene [9, pág. 44, No. (1.15.2.3)].

3.3 Integrales de la forma $I = \int z^\alpha (1-z)^\beta {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz$

3.3.1 Calcular $I = \int z^{a-n-2} (1-z)^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) dz$. De (2)

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} \times \int z^{a-n-2} (1-z)^n {}_2F_1\left(a, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right) dz, \quad (14)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0,$$

y usando (5) en (14) se obtiene

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\tau \Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-c+b)_k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+b}{\tau} + 1\right)} n! z^{a-n-1} \times \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)! (a-j)_j} {}_2F_1\left(a-j, \frac{k+b}{\tau}; \frac{k+b}{\tau} + 1; z\right),$$

el cual, de (2), equivale a

$$I = n! z^{a-n-1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(1-z)^{n-j+1}}{(n-j+1)! (a-j)_j} {}_2R_1(a-j, b; c; \tau; z), \quad (15)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

Si $\tau = 1$ en (15), se obtiene (6).

3.3.2 Calcular $I = \int z^{c-1} (1-z)^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau) dz$. Usando la fórmula generalizada de integración por partes, del resultado 3.1.4 y de (11), se obtiene

$$I = \frac{z^c}{c} (1-z)^n {}_2R_1(a, b; c+1; \tau; z^\tau) + \frac{nz^{c+1}}{c(c+1)} (1-z)^{n-1} {}_2R_1(a, b; c+2; \tau; z^\tau) + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2,1}{c(c+1)\dots(c+n-1)(c+n)} z^{c+n} {}_2R_1(a, b; c+n+1; \tau; z^\tau),$$

esto es,

$$\int z^{c-1} (1-z)^n {}_2R_1(a, b; c; \tau; z^\tau) dz = n! (1-z)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{z^{c+j-1} (1-z)^{-j}}{(n-j+1)! (c)_j} \times {}_2R_1(a, b; c+j; \tau; z^\tau), \quad (16)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq -1, -2, \dots; |z^\tau| < 1$.

Para $\tau = 1$ en (16) se tiene

$$\int z^{c-1} (1-z)^n {}_2F_1(a, b; c; z) dz = n! (1-z)^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{z^{c+j-1} (1-z)^{-j}}{(n-j+1)! (c)_j} \times {}_2F_1(a, b; c+j; z)$$

$$c \neq -1, -2, \dots; |z| < 1.$$

que es un resultado conocido [9, pág 45, No. (1.15.3.5)]

4 Conclusiones

1. Es posible obtener fórmulas computables para las integrales indefinidas asociadas con la función hipergeométrica generalizada.
2. Los resultados que se obtuvieron generalizan a los existentes en la bibliografía especializada.
3. Además de la integrales presentadas en la sección 2, existen otras relacionadas con cada caso; sólo que no es fácil encontrar una forma computable para la dichas integrales

Referencias

- [1] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy. *Special Functions*, ISBN 0-521-62321-9. New York: Cambridge University Press, 1, 1999. Referenciado en 46
- [2] James B. Seaborn. *Hypergeometric functions and their applications*, ISBN 0-387-97558-6. New York: Springer-Verlag, 1991. Referenciado en 46
- [3] A. M. Mathai and R. K. Saxena. *Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and physical Sciences*, ISBN 0-387-06482. New York: Springer-Verlag, 1970. Referenciado en 46
- [4] A. M. Mathai and R. K. Saxena. *Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and physical Sciences*, ISBN 978-3540064824. New York: Springer-Verlag, 1973. Referenciado en 46
- [5] Y. Ben Nakhi and S. L. Kalla. *A generalized beta functions and associated probability density*. International journal of mathematics and mathematics sciences, ISSN 0161-1712, **30**(8), 467-478 (2002). Referenciado en 46
- [6] N. Virchenko. *On some generalizations of the functions of hypergeometric type*. Fractional Calculus and Applied Analysis, ISSN 1311-0454, **2**(3), 233-244 (1999). Referenciado en 46
- [7] Jaime Castillo. *Algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss*. Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165, **3**(5), 67-85 (2007). Referenciado en 47
- [8] Jaime Castillo. *Algunas integrales que involucran a la función hipergeométrica generalizada*. Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165, **4**(7), 7-22 (2008). Referenciado en 47
- [9] Anatolii Platonovich Prudnikov, Yuri Aleksandrovich Brychkov and Oleg Igorovich Marichev. *Integrals and Series: more special functions*, ISBN 978-2881246821. New York: Gordon and Breach Science Publishers, **3**, 1992. Referenciado en 47, 49, 50, 51, 52, 53